

# | فصل سوم نظریهی معادلات |

۶. گزینهی (۱)

$$\frac{(x^2 - 4x + 4)\sqrt{x+1}}{x^2 + x - 2} < 0 \rightarrow \frac{\overset{+}{(x-2)^2} \overset{+}{\sqrt{x+1}}}{(x+2)(x-1)} < 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1 \\ (x+2)(x-1) < 0 \rightarrow -2 < x < 1 \end{cases} \rightarrow -1 < x < 1$$

$$\rightarrow |x| < 1$$

۷. گزینهی (۱)

$$\underbrace{(x^2 + \sqrt{2}x + 2)}_{(1)} (x^2 - 4) \leq 0.$$

(۱) :  $\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 < 0 \\ a = 1 > 0 \end{cases}$  در تعیین علامت نقشی ندارد.  $\rightarrow (1) > 0 \rightarrow$

$$x^2 - 4 \leq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

۸. گزینهی (۳)

در تعیین علامت  $|x|$ ،  $|x-1|$ ،  $|x+1|$  مؤثر نیستند فقط چون  $|x|$

در مخرج است،  $x$  نمی‌تواند صفر شود. پس بی‌شک گزینهی (۳) است

$$\frac{|x-1|}{x} \text{ است فقط باید } x \text{ را تعیین علامت کرد و } x \neq 0.$$

۹. گزینهی (۲)

$$\frac{x}{x-2} + \frac{x-2}{x} + 2 \leq 0.$$

$$\frac{x^2 + x^2 - 4x + 4 + 2x^2 - 4x}{(x-2)x} \leq 0 \rightarrow \frac{4x^2 - 8x + 4}{(x-2)x} \leq 0.$$

$$\frac{4(x-1)^2}{(x-2)x} \leq 0 \xrightarrow{\text{صورت همواره مثبت است}} (x-2)(x) < 0 \rightarrow 0 < x < 2$$

۱۰. گزینهی (۱)

$$p(x) \geq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 3$$

$$q < 0 \rightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow [-2, -1) \cup (1, 2]$$

۱۱. گزینهی (۳)

$$\begin{cases} |x-1| < 2 \\ 2x-5 < |x-2| \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$(1) \quad |x-1| < 2 \rightarrow -2 < x-1 < 2 \rightarrow -1 < x < 3$$

$$(2) \quad 2x-5 < |x-2| \begin{cases} x \geq 2 \rightarrow 2x-5 < x-2 \rightarrow x < 3 \\ \rightarrow 2 \leq x < 3 \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} x < 2 \rightarrow 2x-5 < -x+2 \rightarrow x < \frac{7}{3} \\ \rightarrow x < 2 \end{cases} \quad (II)$$

$$(I) \cup (II) \rightarrow x < 3 \quad (*)$$

$$(*) \cap (1) \rightarrow -1 < x < 3$$

آزمون جامع (۱)

۱. گزینهی (۴)

$$y = (m+2)x^2 - 2mx + 1$$

$\Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

$$a = m+2 > 0 \rightarrow m > -2 \quad (1)$$

$$\Delta = 4m^2 - 4(m+2)(1) = 4m^2 - 4m - 8 = 4(m^2 - m - 2) \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow -1 < m < 2$$

۲. گزینهی (۲)

$$\frac{(x+2)(x-1)}{x^2 + x} > 1 \rightarrow \frac{(x+2)(x-1)}{x^2 + x} - 1 > 0.$$

$$\frac{x^2 + x - 2 - x^2 - x}{x(x+1)} > 0 \rightarrow \frac{-2}{x(x+1)} > 0 \rightarrow \frac{2}{x(x+1)} < 0.$$

$$x(x+1) < 0 \rightarrow -1 < x < 0.$$

۳. گزینهی (۲)

$$A = ax^2 + bx + c \quad 4ac \geq b^2 \rightarrow 4ac - b^2 \geq 0.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = -(4ac - b^2) \xrightarrow{\geq 0} \Delta \leq 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a > 0 & A \geq 0 \\ a < 0 & A \leq 0 \end{cases} \Rightarrow aA \geq 0.$$

۴. گزینهی (۱)

$$3x + 4 = \sqrt{x^2 + 6}$$

$$D_f : 3x + 4 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{4}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} 9x^2 + 24x + 16 = x^2 + 6$$

$$\rightarrow 8x^2 + 24x + 10 = 0 \rightarrow 4x^2 + 12x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 80}}{8} = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{8}$$

$$x = \frac{-12 \pm 8}{8} \begin{cases} -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \checkmark$$

یک ریشه‌ی منفی دارد.

۵. گزینهی (۲)

$$\frac{2x^2 - 4x}{x^2 - x - 2} < 1 \rightarrow \frac{2x^2 - 4x}{x^2 - x - 2} - 1 < 0.$$

$$\rightarrow \frac{2x^2 - 4x - x^2 + x + 2}{x^2 - x - 2} < 0.$$

$$\rightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2} < 0 \rightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} < 0 \quad (x \neq 1)$$

$$\rightarrow \frac{x-1}{x+1} < 0 \rightarrow -1 < x < 1$$

## آزمون جامع (۲)

### ۱. گزینه‌ی (۱)

$$\left( \frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+3} = \frac{3}{x^2 - 9} \right) (x^2 - 9)$$

$$x+3+2x-6=3 \rightarrow 3x=6 \rightarrow x=2 \in D_f \quad \text{یک جواب دارد.}$$

### ۲. گزینه‌ی (۲)

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} - x = -1$$

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} = x - 1 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = x^2 - 2x + 1$$

$$\rightarrow 4x = 4 \rightarrow x = 1 \checkmark$$

چون طرفین را به توان ۲ رسانده‌ایم، ممکن است ریشه‌ی اضافی وارد شود  
که اگر امتحان کنیم، در عبارت صدق می‌کند پس قابل قبول است.

### ۳. گزینه‌ی (۳)

$$2x - \sqrt{x+12} = 4 \rightarrow 2x - 4 = \sqrt{x+12}$$

$$D_f : \begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ x+12 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} 4x^2 - 16x + 16 = x + 12 \rightarrow 4x^2 - 17x + 4 = 0$$

$$\Delta = 289 - 64 = 225 > 0$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{6} = \frac{17 \pm 15}{6} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{32}{6} = 4 \geq 2 \checkmark \\ x_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \times \end{cases}$$

یک ریشه‌ی مثبت دارد.

### ۴. گزینه‌ی (۱)

$$\begin{cases} 4y - x = 1 \rightarrow y = \frac{x+1}{4} \\ y = \frac{x-1}{x} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{x-1}{x} = \frac{x+1}{4} \rightarrow x^2 + 4x = 4x - 4$$

$$\rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow (x+2)^2 = 0 \rightarrow x = -2 \checkmark$$

### ۵. گزینه‌ی (۱)

$$\left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2x+3} = 1 \right) (x-1)(2x+3)$$

$$\rightarrow 2x + 3 + x - 1 = 2x^2 + x - 3$$

$$\rightarrow 2x^2 - 2x - 5 = 0 \rightarrow \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{5}{2}$$

### ۶. گزینه‌ی (۲)

$$3x^2 - 7x + \sqrt{3}k - 1 = 0$$

معادله‌ی  $ax^2 + bx + c = 0$  دارای یک ریشه‌ی صفر است یعنی

$$\rightarrow \sqrt{3}k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

### ۱۲. گزینه‌ی (۱)

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} < 0 \rightarrow \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)(x+3)} < 0 \quad (x \neq -2)$$

$$\rightarrow \frac{x-1}{x+3} < 0 \rightarrow -3 < x < 1 \quad x \neq -2$$

### ۱۳. گزینه‌ی (۴)

$$\left( \frac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt[2]{\sqrt{A}}} \right)^2 = 2^A \rightarrow \left( \frac{(2^2)^{\sqrt[4]{12}}}{2^2 \sqrt{2}} \right)^2 = 2^A$$

$$\rightarrow \left( \frac{2^2 \sqrt[4]{12}}{2 \sqrt{2}} \right)^2 = 2^A \rightarrow \left( \frac{2^2 \sqrt{12}}{2 \sqrt{2}} \right)^2 = 2^A$$

$$\rightarrow (2^{12} \sqrt{2})^2 = 2^A \rightarrow 2^{12} \cdot 2 = 2^A \rightarrow A = 12\sqrt{2}$$

### ۱۴. گزینه‌ی (۲)

$$2x\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1} = 0$$

$$D_f : \mathbb{R} - (-1, 1)$$

$$\sqrt{x^2 - 1} (2x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \checkmark \\ 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(در دامنه تعریف نیست)

### ۱۵. گزینه‌ی (۳)

$$f(x) = \overbrace{(x^2 + 1)}^+ (x^2 - 4x) > 0 \Rightarrow x^2 - 4x > 0$$

$$\rightarrow x(x^2 - 4) > 0 \rightarrow$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & & + & & & \\ \hline & -2 & & 0 & & 2 \\ & - & + & | & - & + \end{array} \Rightarrow (-\infty, -2) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$\Rightarrow a = 2$$

## | ۳ | فصل سوم نظریهی معادلات | > |

۱۲. گزینه‌ی (۴)

$$\begin{aligned}
 & (m-2)x^r + m > 3x - 2 \\
 & \rightarrow (m-2)x^r - 3x + m + 2 > 0 \\
 & \left\{ \begin{array}{l} a > 0 \rightarrow m-2 > 0 \rightarrow m > 2 \quad (1) \\ \Delta < 0 \rightarrow 9 - 4(m-2)(m+2) < 0 \rightarrow 9 - 4m^2 + 16 < 0 \end{array} \right. \\
 & \rightarrow 25 < 4m^2 \rightarrow \frac{25}{4} < m^2 \rightarrow m > \frac{5}{2} \text{ یا } m < -\frac{5}{2} \quad (2) \\
 & (1) \cap (2) \rightarrow m > \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

۱۳. گزینه‌ی (۳)

$$\begin{aligned}
 & \frac{2x-5}{2x^2+3x+2} > \frac{1}{x} \rightarrow \frac{2x-5}{2x^2+3x+2} - \frac{1}{x} > 0 \\
 & \frac{2x^2-5x-2x^2-3x-2}{(2x^2+3x+2)x} > 0 \rightarrow \frac{-8x-2}{(2x^2+3x+2)x} > 0 \\
 & \text{همواره مثبت است} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{array} \right. \text{ پس در تعیین علامت نکشی ندارد.} \\
 & \rightarrow \frac{-8x-2}{x} > 0 \rightarrow -\frac{1}{4} < x < 0
 \end{aligned}$$

۱۴. گزینه‌ی (۴)

$$\begin{aligned}
 & \frac{3x^2-2x+2}{x^2+x+1} < 2 \rightarrow \frac{3x^2-2x+2}{x^2+x+1} - 2 < 0 \\
 & \frac{3x^2-2x+2-2x^2-2x-2}{x^2+x+1} < 0 \rightarrow \frac{x^2-4x}{x^2+x+1} < 0 \\
 & \text{همواره مثبت است} \\
 & \rightarrow x^2-4x < 0 \rightarrow 0 < x < 4 \rightarrow b-a=4
 \end{aligned}$$

۱۵. گزینه‌ی (۱)

$$\begin{aligned}
 & y = (m-1)x^r + \sqrt[3]{x} + m < 0 \\
 & \left\{ \begin{array}{l} a < 0 \quad a = m-1 < 0 \rightarrow m < 1 \quad (1) \\ \Delta < 0 \quad \Delta = 3 - 4(m-1)(m) < 0 \end{array} \right. \\
 & \rightarrow \Delta = 3 - 4(m^2 - m) = 3 - 4m^2 + 4m < 0 \rightarrow 4m^2 - 4m - 3 > 0 \\
 & \rightarrow 4m^2 - 4m - 3 = 0 \rightarrow m = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{8} = \frac{4 \pm 8}{8} \left/ \begin{array}{l} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right. \\
 & m < -\frac{1}{2} \text{ یا } m > \frac{3}{2} \quad (2) \\
 & (1) \cap (2) : m < -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

۷. گزینه‌ی (۲)

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{\gamma}{\lambda} \right)^{rx-1} = \gamma^{x+1} / \lambda^{x+1} \\
 & \left[ \left( \frac{\gamma}{\lambda} \right)^r \right]^{rx-1} = \left( \frac{\gamma}{\lambda} \right)^{x+1} \rightarrow \left( \frac{\gamma}{\lambda} \right)^{rx-3} = \left( \frac{\gamma}{\lambda} \right)^{-x-1} \\
 & \rightarrow rx-3 = -x-1 \rightarrow rx = 2 \rightarrow x = \frac{2}{r}
 \end{aligned}$$

۸. گزینه‌ی (۳)

$$\begin{aligned}
 & (x-1)^r < x^r + \frac{x}{\lambda} \\
 & \rightarrow x^r - rx + 1 < x^r + \frac{x}{\lambda} \\
 & \rightarrow 1 < rx + \frac{x}{\lambda} \rightarrow (1 < \frac{rx}{\lambda}) \frac{\lambda}{rx} \rightarrow \frac{1}{rx} < x
 \end{aligned}$$

۹. گزینه‌ی (۴)

$$\begin{aligned}
 & \frac{x^r - 3x + 2}{2x^r - x + 1} > \frac{3}{4} \rightarrow \frac{x^r - 3x + 2}{2x^r - x + 1} - \frac{3}{4} > 0 \\
 & \frac{4x^r - 12x + 8 - 6x^r + 3x - 3}{4(2x^r - x + 1)} > 0 \rightarrow \frac{-2x^r - 9x + 5}{4(2x^r - x + 1)} > 0
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow -2x^r - 9x + 5 > 0 \rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81+40}}{-4} = \frac{9 \pm 11}{-4} \left/ \begin{array}{l} -5 \\ 1 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow -5 < x < \frac{1}{2}$$

۱۰. گزینه‌ی (۱)

$$\begin{aligned}
 & f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x-1}} \rightarrow 4 < f(x) < \lambda \\
 & 4 < \frac{3}{\sqrt[3]{x-1}} < \lambda \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{\sqrt[3]{x-1}} < \lambda \quad (1) \\ 4 < \frac{3}{\sqrt[3]{x-1}} \quad (2) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$(1) \quad \frac{3}{\sqrt[3]{x-1}} - \lambda < 0 \rightarrow \frac{3 - \lambda \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}} < 0 \rightarrow \frac{11 - \lambda \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}} < 0$$

$$\rightarrow x > \frac{11}{\lambda^3} \text{ یا } x < \frac{1}{\lambda}$$

$$(2) \quad 4 < \frac{3}{\sqrt[3]{x-1}} \rightarrow \frac{3}{\sqrt[3]{x-1}} - 4 > 0 \rightarrow \frac{3 - 4 \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}} > 0$$

$$\rightarrow \frac{7 - 4 \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}} > 0 \rightarrow \frac{1}{\lambda} < x < \frac{1}{4}$$

$$(1) \cap (2) \quad \frac{11}{\lambda^3} < x < \frac{1}{4}$$

۱۱. گزینه‌ی (۴)

$$\begin{aligned}
 & \frac{3-x^r}{x} > 2 \rightarrow \frac{3-x^r}{x} - 2 > 0 \\
 & \rightarrow \frac{3-x^r-2x}{x} > 0 \rightarrow \frac{x^r+2x-3}{x} < 0 \\
 & \rightarrow \frac{(x-1)(x+3)}{x} < 0
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccccc} & -\infty & -3 & 0 & 1 & +\infty \\ \hline & - & + & - & + & \end{array}$$

مجموعه جواب =  $(-\infty, -3) \cup (0, 1)$